

Plasmadiagnostik durch nichtlineare Resonanzwinkelstreuung*

A. SALAT und A. SCHLÜTER

Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching bei München

(Z. Naturforsch. **20 a**, 458—462 [1965]; eingegangen am 16. Dezember 1964)

Nonlinear scattered light with twice the frequency of the incident beam is in phase with the mechanism by which it is produced for some particular angle of emission, and hence has a resonant character in that direction. The angle is a function of the electron density in the plasma. The intensity and the angular width of the resonant beam are discussed. The experimental application to present laboratory plasmas may be practicable, when strong lasers are developed in the infrared region.

A. Einleitung

Die Theorie der Lichtstreuung an Dichtefluktuationen im Plasma ist wohlbekannt und ihre Anwendung zur experimentellen Plasmadiagnostik mit Erfolg möglich¹⁻⁴. Information gewinnt man dabei aus der Analyse der Streuspektren.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode diskutiert, durch nichtlineare Lichtstreuung auf geometrisch-optischem Weg die Elektronendichte zu bestimmen. Dabei wird ausgenutzt, daß der Brechungsindex für elektromagnetische Wellen im Plasma von der Elektronendichte abhängt, gemäß der Dispersionsrelation

$$k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_p^2 = 0, \quad (\text{A } 1)$$

$\mathbf{f} = \pi |\mathbf{f}| = \pi \mathbf{k}$ = Wellenzahlvektor, ω = Frequenz, $\omega_p = \sqrt{(4 \pi n e^2)/m}$ = Plasmafrequenz.

Der zur Beleuchtung verwendete Lichtstrahl habe die Frequenz ω_1 und den Wellenzahlvektor \mathbf{k}_1 . Dann entsteht bei ausreichender Lichtintensität durch nichtlineare Effekte harmonisches Streulicht mit der durch $2\omega_1$ und $2\mathbf{k}_1$ bestimmten Phase. Es breitet sich vom Strahl weg mit der Frequenz $2\omega_1$ und der aus (A 1) folgenden Wellenzahl \mathbf{k}_2 aus. Erzeugung und Ausbreitung der Harmonischen bleiben genau nur für die Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} in Phase, für die die Projektion von $\mathbf{k}_2 \mathbf{n}$ auf die Strahlrichtung mit $2\mathbf{k}_1$ zusammenfällt.

* Die Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und Euratom über die Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.

¹ E. FÜNFER, B. KRONAST u. H.-J. KUNZE, Phys. Letters **5**, 125 [1963].

Aus (A 1) errechnet sich leicht für den Resonanzwinkel ϑ_1 :

$$\cos^2 \vartheta_1 = (2 k_1/k_2)^2 \approx 1 - \frac{3}{4} (\omega_p/\omega_1)^2, \\ \sin \vartheta_1 \approx \sqrt{3} \omega_p/2 \omega_1, \quad (\text{A } 2)$$

so daß ϑ_1 ein eindeutiges Maß für die Elektronendichte des Streuvolumens ist.

B. Plasmagleichungen

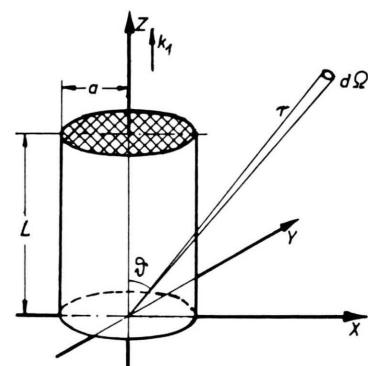


Abb. 1.

Das nichtlineare Streulicht wird in zwei Schritten gewonnen. Im ersten Teil wird das Plasma der Störung durch die einfallende Lichtwelle ausgesetzt und diese Störung als Größe erster Ordnung mit linearisierten Gleichungen behandelt. Größen erster Ordnung werden mit oberem Index (1) bezeichnet, so

² H.-J. KUNZE, E. FÜNFER, B. KRONAST u. W. H. KEGEL, Phys. Letters **11**, 42 [1964].

³ W. E. DAVIES u. S. A. RAMSDEN, Phys. Letters **8**, 179 [1964].

⁴ S. A. RAMSDEN u. W. E. DAVIES, Phys. Rev. Letters **13**, 227 [1964].



daß z. B. die einfallende Welle im Plasma das elektrische Feld $\mathfrak{E}^{(1)}$ besitzt.

$$\mathfrak{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{E}_1 \sin(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t + \varphi) =: \mathfrak{E}_1 \sin \Phi. \quad (\text{B } 1)$$

Das Koordinatensystem wird mit der z -Achse in \mathbf{f}_1 -Richtung gelegt (s. Abb. 1).

Das ungestörte Plasma wird durch Größen nullter Ordnung gekennzeichnet, zu denen auch ein homogenes konstantes Magnetfeld

$$\mathfrak{B}^{(0)} = : |\mathfrak{B}^{(0)}| \cdot \mathfrak{b} \quad (\text{B } 2)$$

gehört. Das Verhältnis von Gyro- zu Lichtfrequenz ω_H/ω_1 mit

$$\omega_H = |e \mathfrak{B}^{(0)} / (m c)| \quad (\text{B } 3)$$

(e = Elektronenladung, m = Elektronenmasse)

soll so klein sein, daß der Einfluß des Magnetfeldes auf die Ausbreitung des Lichtes zu vernachlässigen ist.

In der zweiten Ordnung treten nichtlineare Effekte auf, darunter das Streulicht zweiter Ordnung mit der doppelten Frequenz. Da es sich um Streuung an erzwungenen kohärenten und nicht an thermischen Fluktuationen handelt, genügen zur Beschreibung makroskopische Plasmagleichungen.

Die Bewegungsgleichungen für ein kaltes Elektronenplasma lauten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \right) \mathfrak{v} = \frac{e}{m} \left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{B} \right), \quad (\text{B } 4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \mathfrak{v}) = 0. \quad (\text{B } 5)$$

Streuung an den Ionen ist wegen deren großer Masse zu vernachlässigen.

Dazu kommen die MAXWELLSchen Gleichungen, die sich zur Differentialgleichung für das elektrische

Feld umformen lassen

$$\left(c^2 \text{rot rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathfrak{E} = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{j} \quad (\text{B } 6)$$

mit der Stromstärke

$$\mathfrak{j} = e n \mathfrak{v}. \quad (\text{B } 7)$$

Die im folgenden auftretenden Verhältnisse ω_P/ω_1 , ω_H/ω_1 werden durchweg als klein gegen eins betrachtet und nur in niedrigster sinnvoller Ordnung mitgenommen.

C. Streulicht

(B 4) lautet in erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathfrak{v}^{(1)}}{\partial t} = \frac{e}{m} \left(\mathfrak{E}^{(1)} + \frac{\mathfrak{v}^{(1)}}{c} \times \mathfrak{B}^{(0)} \right), \quad (\text{C } 1)$$

und nach der zweckmäßigen Zerlegung in Komponenten senkrecht und parallel zum Magnetfeld erhält man die Lösung

$$\mathfrak{v}^{(1)} = \frac{e}{m \omega_1} \left\{ \mathfrak{E}_1 \cos \Phi + \frac{\omega_H}{\omega_1} \mathfrak{b} \times \mathfrak{E}_1 \sin \Phi \right\}. \quad (\text{C } 2)$$

Aus (B 5) folgt

$$\mathfrak{n}^{(1)} = \frac{e n \omega_H}{m \omega_1^3} (\mathbf{f}_1 \cdot [\mathfrak{b} \mathfrak{E}_1]) \cos \Phi \quad (\text{C } 3)$$

und für das \mathfrak{B} -Feld der Welle

$$\mathfrak{B}^{(1)} = (1/\omega_1) \mathbf{f}_1 \times \mathfrak{E}_1 \sin \Phi. \quad (\text{C } 4)$$

Für das Feld zweiter Ordnung wird $(\partial/\partial t) \mathfrak{j}^{(2)}$ gebraucht:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{j}^{(2)} = e n \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{v}^{(2)} + e \frac{\partial}{\partial t} (n^{(1)} \mathfrak{v}^{(1)}) \quad (\text{C } 5)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{v}^{(2)} = & \frac{e}{m} \mathfrak{E}^{(2)} + \frac{e}{m c} \mathfrak{v}^{(2)} \times \mathfrak{B}^{(0)} \\ & + \frac{e}{m c} \mathfrak{v}^{(1)} \times \mathfrak{B}^{(1)} - \mathfrak{v}^{(1)} \cdot \nabla \mathfrak{v}^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{C } 6)$$

Da $\mathfrak{v}^{(2)} \times \mathfrak{B}^{(0)}$ voraussetzungsgemäß klein ist, ergibt sich die Gleichung

$$\left(c^2 \text{rot rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_P^2 \right) \mathfrak{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \left\{ \frac{e^2 n}{m} \mathfrak{v}^{(1)} \times \mathfrak{B}^{(1)} - e n \mathfrak{v}^{(1)} \cdot \nabla \mathfrak{v}^{(1)} + e \frac{\partial}{\partial t} (n^{(1)} \mathfrak{v}^{(1)}) \right\} \quad (\text{C } 7)$$

und nach elementaren Rechnungen mit (C 3, 4, 5)

$$= -4\pi e n \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{f}_1 \mathfrak{E}_1^2 \sin 2\Phi - \frac{\omega_H}{\omega_1} \mathfrak{E}_1 (\mathbf{f}_1 \cdot [\mathfrak{b} \mathfrak{E}_1]) \cos 2\Phi \right\}. \quad (\text{C } 8)$$

Die rechte Seite von (C 8) ist noch mit der Funktion $F(\mathbf{r}_\perp) = F(x, y)$ zu multiplizieren, die angibt, wie die Laser-Energie auf den Querschnitt des Strahles verteilt ist. Ferner verschwindet die rechte Seite außerhalb der durchstrahlten Plasmaschicht, also für z außerhalb $0 \leq z \leq L$.

Die Lösung von (C 8) enthält longitudinale und transversale Wellen. In Anhang I ist gezeigt, wie man die Lösung der Differentialgleichung für den transversalen Teil unter Berücksichtigung der „Strahlungsbedingung“ erhält.

Wenn der Beobachtungsort in der „Wellenzone“ (s. Anhang II) liegt, herrscht dort das Feld

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{e n}{c^2 r} \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{n}[\mathbf{n} \mathbf{f}_1]] \mathfrak{E}_1^2 \int_V d^3 \mathbf{r}' F(\mathbf{r}'_\perp) \sin[k_2 r - 2 \omega_1 t - 2\varphi + (2\mathbf{f}_1 - \mathbf{n} k_2) \cdot \mathbf{r}'] \right. \\ & \left. - \frac{\omega_H}{\omega_1} [\mathbf{n}[\mathbf{n} \mathfrak{E}_1]] (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b} \mathfrak{E}_1) \int_V d^3 \mathbf{r}' F(\mathbf{r}'_\perp) \cos[k_2 r - 2 \omega_1 t - 2\varphi + (2\mathbf{f}_1 - \mathbf{n} k_2) \cdot \mathbf{r}'] \right\} \quad (C 9)\end{aligned}$$

mit

$$|\mathbf{r}| = r \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r. \quad (C 10)$$

$$k_2 \text{ ist die zu } 2 \omega_1 \text{ gemäß (A 1) gehörige Wellenzahl: } k_2^2 c^2 = 4 \omega_1^2 - \omega_P^2. \quad (C 11)$$

Der Energiefluß in einen Raumwinkel $d\Omega$ ist

$$dI = \frac{c}{4\pi} \frac{k_2 c}{2 \omega_1} \mathfrak{E}^2 r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{e n}{c^2} \right)^2 \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^4 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} [\mathbf{n}[\mathbf{n} \mathbf{f}_1]]^2 \mathfrak{E}_1^4 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 [\mathbf{n}[\mathbf{n} \mathfrak{E}_1]]^2 (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b} \mathfrak{E}_1)^2 \right\} \quad (C 12)$$

$$\cdot \int_V d^3 \mathbf{r}' F(\mathbf{r}'_\perp) \int_V d^3 \mathbf{r}'' F(\mathbf{r}''_\perp) \cos[(2\mathbf{f}_1 - k_2 \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')] d\Omega. \quad (C 13)$$

Die Integration über z', z'' ist elementar:

$$\int_0^L dz' \int_0^L dz'' \cos[A + 2\Delta k (z' - z'')] = [\sin^2(\Delta k \cdot L)]/(\Delta k)^2. \quad (C 14)$$

Wenn $F(\mathbf{r}_\perp)$ ein Symmetriezentrum besitzt, wird aus (C 13)

$$\begin{aligned}dI = & \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e}{n c^2} \right)^2 \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^4 k_1^2 \mathfrak{E}_1^4 \left\{ \frac{1}{4} \sin^2(\mathbf{n}, \mathbf{f}_1) + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 \sin^2(\mathbf{n}, \mathfrak{E}_1) \cdot \gamma^2 \right\} \\ & \cdot \frac{\sin^2(\Delta k \cdot L)}{(\Delta k)^2} \cdot [\int d^2 \mathbf{r}_\perp F(\mathbf{r}_\perp) \cos(k_2 \sin \vartheta \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp)]^2 d\Omega \quad (C 15)\end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen

$$\Delta k = k_1 - \frac{1}{2} k_2, n_z = \frac{1}{2} (2 k_1 - k_2 \cos \vartheta), \quad (C 16)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad |\mathbf{n}_\perp| = 1, \quad \gamma = \frac{1}{k_1 |\mathfrak{E}_1|} (\mathbf{f}_1 \cdot [\mathbf{b} \mathfrak{E}_1]). \quad (C 17)$$

Der Resonanzwinkel ϑ_1 ist bestimmt durch $\Delta k = 0$:

$$\cos^2 \vartheta_1 = \frac{4 k_1^2 c^2}{k_2^2} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^2, \quad \sin^2 \vartheta_1 \approx \vartheta_1^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^2. \quad (C 18)$$

Die Resonanz hat eine gewisse Breite, charakterisiert durch $\Delta k \cdot L < 1$. Dem entspricht ein Resonanzwinkelbereich von maximal

$$|(2 k_1 - k_2 \cos \vartheta) \cdot L| = k_2 L \Delta \cos \vartheta = 1, \quad \Delta \cos \vartheta \approx \sin \vartheta_1 \cdot \Delta \vartheta = 1/k_2 L. \quad (C 19)$$

Insgesamt wird daher in den Resonanzwinkelbereich $\Delta \Omega = \Delta \cos \vartheta \cdot \Delta \varphi$ pro Zeiteinheit die Energie gestrahlt

$$\begin{aligned}dI = & \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_1^2 \left(\frac{e \mathfrak{E}_1}{m \omega_1 c} \right)^2 \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^4 \frac{1}{32\pi^2} k_1 L \cdot k_1^2 \Delta \varphi \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 \sin^2(\mathbf{n}, \mathfrak{E}_1) \gamma^2 \right\} \\ & \cdot \left[\int d^2 \mathbf{r}_\perp F(\mathbf{r}_\perp) \cos \left(\sqrt{3} \frac{\omega_P}{c} \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \right) \right]^2 \quad (C 20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=& \left(\frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_1^2 \pi a^2 \right)^2 \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^4 k_1 L \frac{e^2}{4\pi m^2 c^5} \Delta \varphi \cdot \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\omega_P}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 \sin^2(\mathbf{n}, \mathfrak{E}_1) \gamma^2 \right\} \\ & \cdot \left[\int d^2 \mathbf{r}_\perp F(\mathbf{r}_\perp) \cos \left(\sqrt{3} \frac{\omega_P}{c} \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \right) \right]^2, \quad (C 21)\end{aligned}$$

wobei πa^2 die Querschnittsfläche des einfallenden Lichtstrahls sein soll, so daß (C 21) direkt die Gesamtleistung des Lasers

$$I_1 \equiv (c/8\pi) \mathfrak{E}_1^2 \pi a^2 \quad (C 22)$$

enthält.

Der Faktor

$$\eta \equiv \frac{1}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int d^2 \mathbf{r}_\perp F(\mathbf{r}_\perp) \cos \left(\sqrt{3} \frac{\omega_P}{c} \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \right) \quad (C 23)$$

$$\text{ist } \eta = 1 \quad \text{für } a \ll c/\omega_P. \quad (\text{C 24})$$

Für $a\omega_P/c > 1$ wird η von der Form der Intensitätsverteilung bestimmt und nimmt im allgemeinen mit wachsender Strahlbreite ab.

Beispielsweise ist für einen kreisförmigen Strahlquerschnitt

$$F(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq r \leq a, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{C 25})$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2}{(\sqrt{3} a \omega_P/c)^2} \sqrt{3} \frac{a \omega_P}{c} J_1 \left(\sqrt{3} \frac{a \omega_P}{c} \right) \\ &\approx 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{3} \frac{a \omega_P}{c} \right)^{-3/2} \sin \left(\sqrt{3} \frac{a \omega_P}{c} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad \text{für } a \omega_P/c \gg 1. \end{aligned} \quad (\text{C 26})$$

Das Signal in den Resonanzwinkel hebt sich vom Streulicht in andere Richtungen nur ab, wenn der Resonanzfaktor $\Delta k^{-2} \sin^2(\Delta k \cdot L)$ zusammen mit $\sin^2(\eta, f_1)$ den Wert für andere Winkel ϑ' überwiegt. Das ist der Fall für

$$L^2 \gg (c/\omega_P)^2 \sin^2 \vartheta'. \quad (\text{C 27})$$

Das Resonanzstreu Licht fällt im Abstand r vom Plasma auf die Fläche ΔF :

$$\Delta F = r^2 \Delta \Omega = (r^2/k_2 L) \Delta \varphi. \quad (\text{C 28})$$

Für günstige Geometrie, $\gamma^2 = 1$, ist der vom Magnetfeld verursachte Anteil um den Faktor $(\omega_H/\omega_P)^2$ von dem ohne Magnetfeld verschieden.

D. Zahlenmäßige Auswertung

Die folgende Tabelle mit charakteristischen Parametern ist für Rubin-Laserlicht

$$k_1 = 0,9 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{D 1})$$

nach oben entwickelten Formeln zusammengestellt.

	$n =$	10^{14}	10^{16}	10^{18} cm^{-3}
ω_P	5,6 ·	10^{11}	10^{12}	10^{13} sec^{-1}
$(\omega_P/\omega_1)^2$	4,3 ·	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$\vartheta_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \omega_P/\omega_1$	1,8 ·	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$\Delta \vartheta = \sqrt{\frac{3}{4}} c/\omega_P L$	$\left(\frac{6,2}{L} \right) \cdot$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$L_1 = c/\omega_P$	5 ·	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4} cm
$L_2 = c \omega_1/\omega_P^2$	3 ·	10^2	10^0	10^{-2} cm

Tab. 1.

Die Länge L_1 ist bei der Diskussion von Strahlbreite und Intensität nach (C 24, 26) von Interesse. L_2 ist die Mindestlänge, bei der die Winkelunschärfe $\Delta \vartheta$ kleiner als der Resonanzwinkel ϑ_1 ist.

Ferner

$$\begin{aligned} (\omega_H/\omega_1)^2 &\approx 2,5 \cdot 10^{-17} \cdot \mathfrak{B}^2 \quad [\text{Gauß}], \\ e^2/(4 \pi m^2 c^5) &= 0,9 \cdot 10^{-18} \text{ cgs-Einheiten.} \end{aligned} \quad (\text{D 2})$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 \text{ Gigawatt}, |\mathfrak{B}| = 10^5 \text{ Gauß}, n = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}, \\ a &= 10^{-2} \text{ cm}, L = 10^{-1} \text{ cm}, \end{aligned} \quad (\text{D 3})$$

$$\gamma^2 \approx \sin^2(\eta, \mathfrak{E}_1) \approx 1.$$

Wenn noch der mit a rasch oszillierende Faktor $\sin^2[\sqrt{3}(a\omega_P/c) - \pi/4]$ in η^2 durch seinen Mittelwert 1/2 ersetzt wird, geht in das Streulicht pro Zeiteinheit die Energie

$$\Delta I = I_1 \cdot 4 \cdot 10^{-10} \cdot (0,3 \cdot 10^{-4} + 2,5 \cdot 10^{-7}) \Delta \varphi. \quad (\text{D 4})$$

Das heißt, für gegenwärtige Rubin-Laser und Laboratoriumsplasmen ist das Streulicht noch knapp außerhalb des messbaren Bereiches.

Da die Lichtfrequenz mit der fünften Potenz ein geht, scheint der Effekt von besonderem Interesse für künftige Laser hoher Intensität im Infrarotbereich.

Denkbar ist auch die Anwendung von Mikrowellen zur Analyse dünner Plasmen großer räumlicher Ausdehnung.

Es ist seit kurzem möglich, mit Lasern Plasmen von sehr hoher Dichte zu erzeugen⁴. Da der magnetfeldunabhängige Teil des Streulichtes bei fester Frequenz für $a\omega_P/c \gg 1$ insgesamt der Dichte proportional ist, liegt hier eine weitere Möglichkeit in den experimentell interessanten Größenordnungsbereich vorzudringen.

Beide erwähnten Richtungen führen zu einer Vergrößerung des Resonanzwinkels und wirken auch dadurch experimentell vorteilhaft.

Wir sind den Herren Dr. W. KEGEL und Dr. B. LAMBORN für wertvolle Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Anhang I

Die „Strahlungslösung“ der Gleichung

$$\left(c^2 \text{rot rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_P^2 \right) \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{A}(\mathbf{r}) \exp \{ -2i\omega_1 t \} \quad (\text{I}, 1)$$

lässt sich durch FOURIER-Transformation gewinnen. Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{E}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d^3\mathbf{f} \tilde{\mathfrak{E}}(\omega, \mathbf{f}) \\ &\quad \cdot \exp \{ i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \}, \end{aligned} \quad (\text{I}, 2)$$

$$\tilde{\mathfrak{E}}(\omega, \mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3\mathbf{r} \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) \exp \{ -i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \}$$

wird aus (I, 1)

$$\begin{aligned} -c^2[\mathbf{f}[\mathbf{f}[\tilde{\mathfrak{E}}]] - (\omega^2 - \omega_p^2) \tilde{\mathfrak{E}}] &= (\omega^2 - \omega_p^2) \tilde{\mathfrak{E}} \\ &= 2\pi\delta(\omega - 2\omega_1) \int d^3r \mathfrak{A}(\mathbf{r}) \exp\{-i\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}\}. \end{aligned} \quad (I, 3)$$

Der Transversalteil der Wellen ist definiert als

$$\tilde{\mathfrak{E}}_{\perp} = -(1/k^2)[\mathbf{f}\cdot[\mathbf{f}[\tilde{\mathfrak{E}}]]]. \quad (I, 4)$$

Aus (I, 3)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{E}}_{\perp}(\omega, \mathbf{f}) &= \frac{-2\pi\delta(\omega - 2\omega_1)}{k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_p^2} \frac{1}{k^2} \\ &\quad \cdot \int d^3r [\mathbf{f}[\mathbf{f}[\mathfrak{A}]]] \exp\{-i\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}\} \end{aligned} \quad (I, 5)$$

und nach Integration über Winkelvariable

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{E}}_{\perp}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot rot} \exp\{-2i\omega_1 t\} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r' \frac{\mathfrak{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{k} \frac{\exp\{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\}}{k^2 c^2 - 4\omega_1^2 + \omega_p^2}. \end{aligned} \quad (I, 6)$$

Der Integrationsweg muß in die komplexe k -Ebene verschoben werden. Die Wahl des Weges bedeutet die Auswahl bestimmter Lösungen der homogenen Gl. (I, 1) und je nachdem ein- oder auslaufende Wellen.

Für große Entfernungen $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ gilt näherungsweise

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \quad (I, 7)$$

und nach Auswertung des Integrals mit Hilfe des Residuensatzes und den Bezeichnungen (C 10, 11)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{E}}_{\perp}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-1}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \exp\{i(k_2 r - 2\omega_1 t)\} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r' [\mathbf{n}[\mathbf{n}[\mathfrak{A}(\mathbf{r}')]]] \exp\{-i\mathbf{n} k_2 \cdot \mathbf{r}'\}. \end{aligned} \quad (I, 8)$$

Anhang II

Die Wellenzone ist als der Bereich definiert, in dem die Beziehung (I, 7) in der Wellenphase eine gute Näherung darstellt. Wegen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2r} [\mathbf{n}[\mathbf{n}[\mathbf{r}']]]^2 + O\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \quad (II, 1)$$

bedeutet dies im vorliegenden Fall die Bedingung

$$(k_1/r)[\mathbf{n}[\mathbf{n}[\mathbf{r}']]]^2 \ll 1 \quad (II, 2)$$

und da \mathbf{n} ziemlich genau in Strahlrichtung liegt,

$$r \gg k_1 a^2. \quad (II, 3)$$